

一、选择题

本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 6, 8, 4, 5, 12 的中位数为

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 9

2. 已知平面向量 a, b 不共线，且 $2a + yb = xa - 3b$ ，则

- A. $x = 2, y = -3$ B. $x = -2, y = 3$ C. $x = 2, y = 3$ D. $x = -2, y = -3$

3. 已知集合 $A = \left\{ \sin \frac{7\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{3}, \tan \frac{5\pi}{4} \right\}$, $B = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$ B. $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right\}$ C. $\left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$ D. $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$

4. 曲线 $y = 5x + 8 \ln x$ 在点 $(1, 5)$ 处的切线方程为

- A. $y = 3x + 2$ B. $y = 5x$ C. $y = 8x - 3$ D. $y = 13x - 8$

5. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 2p_1x (p_1 > 0)$ 和 $C_2: x^2 = 2p_2y (p_2 > 0)$ 均经过点 $(4, 8)$ ，则 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为

- A. 12 B. $4\sqrt{5}$ C. 6 D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

6. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1，则 $a =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

7. 一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市，以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩。该塔群共有 108 座塔，依山势自上而下排成 12 行，将第 i 行中塔的座数记为 $a_i (i = 1, 2, \dots, 12)$ ，其中 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_4 = a_3 = 5$ ，且

a_6, a_7, \dots, a_{12} 是一个首项为 7，公差为 2 的等差数列。将 a_1, a_2, \dots, a_{12} 分为 6 组，每组 2 个数。使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为

$d (d > 0)$ 的等差数列。则 $d =$

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

8. 设 $U = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \{-2, -1, 1, 2\}, i = 1, 2, 3\}$ 为空间中 64 个点构成的集合。点 $P(1, 1, 1)$ ，记样本空间 $\Omega = \mathcal{C}_U\{P\}$ 。从 Ω 中随机取一个点。定义随机变量 X 如下：对 Ω 中的每个点 $A(x_1, x_2, x_3)$ ，令 $X(A) = x_1 + x_2 + x_3$ 。则 X 的数学期望为

- A. $-\frac{1}{21}$ B. $-\frac{1}{63}$ C. 0 D. $\frac{1}{7}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9. 设 $z = 3 + 2i$ ，则

- A. $\bar{z} = 3 - 2i$ B. $|z| = 5$ C. $z^2 = 5 + 12i$ D. $\frac{z+3}{z-i} \in \mathbf{R}$

10. 在空间中， A, B 为两个定点，动点 C 到直线 AB 的距离为 2，动点 D 到直线 AB 的距离为 1。若二面角 $C-AB-D$ 为 60° ，则

- A. $\angle CAD \geq 60^\circ$ B. $CD \geq \sqrt{3}$
 C. 当 $AB \perp CD$ 时， $CD \perp$ 平面 ABD D. 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时， $AC \perp AD$

11. 已知圆 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$ ，圆 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$ ，圆

$C_3: x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ ，直线 $l: y = kx + b$ 与 C_1, C_2, C_3 均有两个交点。记 l 被

C_1, C_2, C_3 截得的弦长分别为 s_1, s_2, s_3 ，则

- A. k 可以取任意实数 B. 满足 $s_1 = s_2 = s_3$ 的直线 l 共有 3 条
 C. 满足 $s_1 + s_2 + s_3 = 3$ 的直线 l 多于 3 条 D. 当 $b = 0$ 时， $s_1 + s_2 + s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12. 双曲线 $5x^2 - 6y^2 = 1$ 的离心率为_____。

13. 已知 $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ ($a \in \mathbf{Z}, 0 \leq \theta < 2\pi$) 是偶函数， $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增。则 $\theta =$ _____， $f(\frac{2\pi}{3}) =$ _____。

14. 设实数 q 满足：存在数列 $\{a_n\}$ ，使得对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，均有

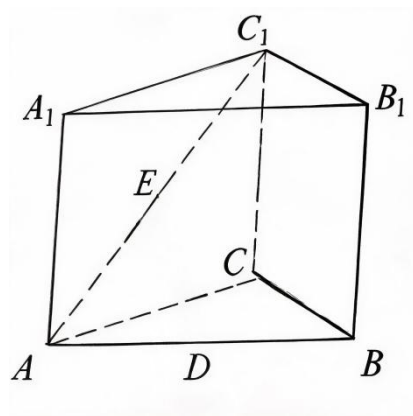
$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + n$, 且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列。则 q 的最大值为_____。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 且 D 、 E 分别为 AB 、 AC_1 的中点。

(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 设 $CC_1 = 2$, 直线 DE 与平面 ACC_1A_1 的夹角为 45° , 求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离。



16. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 3$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(1) 求 $\cos A$ 。

(2) 设 D, E 两点满足: D 在 BA 的延长线上, $DE \parallel BC$, $AE \perp AC$. 若 $DE = \sqrt{6}$, 求 CE 。

17. 设整数 $N \geq 2$ 。某同学用一个球进行投篮练习, 至多投篮 N 次, 当且仅当投中 1 次时或 N 次均未投中时, 停止练习。设该同学每次投中的概率为 p ($0 < p < 1$), 各次投中与否相互独立。记 X 为停止练习时该同学的投篮次数。

(1) 当 $N = 4$, $p = \frac{1}{3}$ 时, 求 X 的分布列;

(2) 设 k, m 均为自然数。

(i) 当 $k \leq N - 1$ 时, 求 $P(X > k)$;

(ii) 当 $k + m \leq N - 1$ 时, 证明: $P(X > k + m \mid X > k) = P(X > m)$ 。

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-1, 0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 其中 Q 在第三象限, 直线 PO 与 C 的另一个交点为 R .

(i) 若 $\triangle PQR$ 的面积为 $\triangle PFO$ 的 3 倍, 求 l 的方程;

(ii) 求 $\tan \angle PQR$ 的最小值.

19. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$. 对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$, 定义集合 $D(x_0) = \{d \in \mathbf{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}$.

(1) 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1 - x$, 求 $D(-1)$;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, $f(x_1) \leq f(x_2)$, 且 $x_1 x_2 \neq 0$, 证明: $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

(3) 设 $f(x)$ 满足: ①若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$; ②当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(0)$.

(i) 证明: $f(0) \geq 1$;

(ii) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增.